Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественных и математических наук»

ФИЗИКА

Методические указания к
выполнению лабораторной работы
«Определение момента инерции маховика»
для студентов направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическоеобеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
23.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

очной и заочной формы обучения

Энгельс 2024

Цель работы: изучение вращательного движения твердых тел, определение момента инерции маховика.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Вращательное движение твердых тел

Вращательным движением тела называется такое движение, при котором траекториями всех точек тела являются концентрические окружности с центрами на одной прямой, называемой осью вращения.

Быстрота вращения характеризуется угловой скоростью или циклической частотой и обозначается $\bar{\omega}$. Она равна изменению угловой координаты φ на единицу времени t:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \varphi'(t) \qquad (1)$$

Единицей угловой скорости является 1 рад/с. Быстрота изменения угловой скорости характеризуется угловым ускорением ε:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \omega'(t) = \varphi''(t) \qquad (2)$$

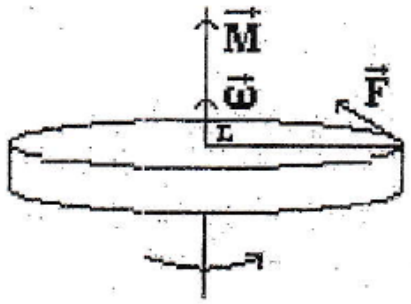

Рис. 1

Скорость и ускорение – векторные величины. Вектор $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения. Его направление определяется правилом правой руки. Согните четыре пальца правой руки по направлению вращения.

Тогда большой палец будет направлен по оси в направлении, совпадающим с направлением вектора $\bar{\omega}$ (рис. 1). Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ при ускоренном движении совпадает по направлению с вектором $\bar{\omega}$, а при замедленном движении противоположен ему.

Если к телу с определенной осью вращения приложена сила, то вращающее действие этой силы зависит от ее величины, точнее, приложения и направления ее действия по отношению к оси. Вращающее действие силы характеризуется моментом этой силы M. Момент силы относительно данной оси численно равен произведению проекции силы F на плоскость, перпендикулярную к оси, на кратчайшее расстояние r между осью и точкой приложения силы.

$$\bar{M} = \bar{F} \cdot r \qquad (3)$$

Вектор момента силы направлен по оси так, что, смотря на тело в направлении вектора $\bar{M}$, мы видим вращение, проходящее по часовой стрелке (рис. 1). Момент силы равен нулю, если сила параллельна оси (F=0) или проходит через нее (r=0).

Момент инерции

Момент инерции играет туже роль во вращательном движении, что и масса при движении по прямой. Чем больше момент инерции, тем больший требуется момент силы, чтобы изменить угловую скорость.

Момент инерции тела относительно данной оси – это мера инертности тела при вращении вокруг этой оси.

Момент инерции тела – скалярная величина. Нужно иметь ввиду, что эта величина существует безотносительно к вращению. Каждое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое.

Значение момента инерции определяется не только массой тела, но и радиальным распределением массы. Если рассмотреть отдельную

материальную точку массой m, вращающуюся вокруг оси на расстоянии r, то ее момент инерции равен:

$$J = m \cdot r^2 \tag{4}$$

Если любое вращающееся тело разбить на малые элементы с массой m_i, вращающиеся вокруг оси на расстоянии r_i, то полный момент инерции тела относительно данной оси будет равен сумме моментов инерции отдельных малых элементов, из которых составлено тело:

$$J = \sum_{i=1}^{N} J_i = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу:

$$J = \int r^2 dm \tag{5}$$

В качестве примера найдем момент инерции однородного диска высотой h и радиусом R_0 относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (рис. 2). Выразим в (5) массу через плотность:

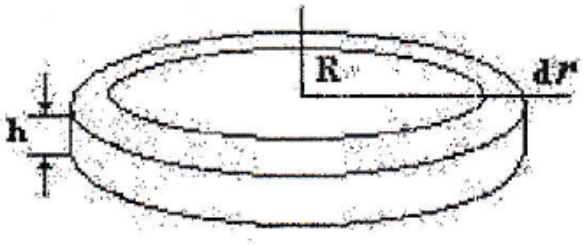

Рис. 2

$$J = \int \rho r^2 dV.$$

Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr. Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном r. Объем такого слоя $h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$, поскольку диск однороден, ρ можно вынести за знак интеграла.

$$J = \rho \int_0^{R_0} r^2 h 2\pi r dr = 2\pi h \rho \int_0^{R_0} r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R_0^4}{4}$$

Выведем массу всего диска $m = \rho \cdot h \cdot \pi \cdot {R_0}^2$ и получим:

$$J_0 = \frac{mR^2}{2}.$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется теоремой Штейнера: *момент инерции тела J относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции J_0 относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела и произведения массы тела m на квадрат расстояния ℓ между осями*:

$$J = J + m_0 \cdot \ell^2 \tag{6}$$

Момент силы, момент инерции относительно той же оси и угловое ускорение тела связаны основным законом динамики для вращательного движения, аналогичным второму закону Ньютона:

$$M = J \cdot \varepsilon \tag{7}$$

Этот закон можно записать в виде:

$$\bar{M} = J\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d(J\bar{\omega})}{dt} = \frac{d(\bar{L})}{dt} = J\bar{\varepsilon} \tag{8}$$

Вектор $\bar{L}$ называется моментом импульса тела. Тело, вращающееся вокруг оси, обладает кинетической энергией:

$$T = \frac{J\omega^2}{2} \tag{9}$$

Принцип измерения и вывод рабочей формулы

Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси описывается основным уравнением динамики вращательного движения (8).

$$\bar{M} = J \cdot \bar{\varepsilon} \tag{10}$$

где ε – угловое ускорение;

M – момент сил, действующих на тело;

J – момент инерции тела относительно оси.

Рассмотрим опыт, позволяющий на основании уравнения (10) определять момент инерции вращающегося тела. Схема опыта представлена на рис. 3. Тело вращения – маховик 1 со шкивом 2, укрепленный на горизонтальной оси. Вращающий момент сил создается грузом 3, привязанным к навитой на шкив нити:

$$M = r \cdot T \tag{11}$$

где T – сила натяжения нити, r – радиус шкива.

На груз действует сила тяжести mg и сила натяжения нити, под действием которых он движется с ускорением a. Согласно второму закону Ньютона: $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$ в проекциях на ось y:

$$m \cdot a = m \cdot g - T$$

Или, преобразовав,

$$T = m(q - a), M = r \cdot m(q - a) \tag{12}$$

Если шнур разматывается без проскальзывания, то пройденное грузом расстояние h связано с углом поворота шкива φ соотношением:

$$h = r \cdot \varphi \tag{13}$$

Продифференцировав (13) соответственно один и два раза по времени с учетом постоянства r, получим связь между линейной скоростью υ, ускорением груза, угловой скоростью ω и ускорением маховика:

$$\upsilon = r \cdot \omega, a = r \cdot \varepsilon \ \rightarrow \ \varepsilon = \frac{a}{r} \tag{14}$$

Подставив в (10) выражение для ε из (14) и для M из (4) и (12), получим:

$$J \cdot \frac{a}{r} = r \cdot m \cdot (g - a) \tag{15}$$

Из этого выражения видно, что для определения момента инерции маховика J необходим радиус вала r, масса груза m и ускорение движения груза a. Первые две величины могут быть измерены прямым путем, а

ускорение – косвенным, через путь, проходимый грузом, и его время движения t. Учитывая, что начальная скорость груза равна нулю, запишем уравнение кинематики его поступательного прямолинейного движения:

$$h = \frac{a \cdot t^2}{2} \tag{16}$$

и выразим из этого уравнения ускорение a:

$$a = \frac{2 \cdot h}{t^2} \tag{17}$$

Подставляя (17) в уравнение (15), получим рабочую формулу для экспериментального определения момента инерции маховика через величины, измеряемые прямым путем: радиус вала r, массу груза m, время движения груза t, пройденный грузовой путь h и известную величину – ускорение свободного падения ≈ 10 м/с^2.

$$J = \frac{r^2 \cdot m \cdot (\mathrm{g} \cdot t^2 - 2h)}{2h} \tag{18}$$

Эта же рабочая формула может быть выведена из энергетических представлений. Груз массой m, поднятый на высоту h, обладает запасом потенциальной энергии $\omega_n = m \cdot \mathrm{g} \cdot h$. В процессе опускания груза и связанным с этим вращением маховика потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения груза $\omega_1 = (m \cdot \upsilon^2)/2$ и вращательного движения маховика $\omega_2 = (J \cdot \upsilon^2)/2$. Пренебрегая действием сил трения, запишем закон сохранения механической энергии:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \tag{19}$$

В этом случае для получения рабочей формулы необходимо выразить скорость груза и угловую скорость маховика через величины, которые могут быть измерены прямым путем, то есть через h и t. Запишем уравнение кинематики прямолинейного движения груза с нулевой начальной скоростью:

$$h = \frac{a \cdot t^2}{2}, \upsilon = a \cdot t \tag{20}$$

Выразив из первого уравнения а и подставив его во второе, получим:

$$\upsilon = \frac{2h}{t} \tag{21}$$

Связь скорости движения груза и угловой скорости маховика дана выражением $\upsilon = r \cdot \omega$, которое с учетом (21) можно записать:

$$\omega = \frac{2h}{rt} \tag{22}$$

Подставим (21) и (22) в уравнение (19):

$$mgh = \frac{2mh^2}{t^2} + \frac{2Jh^2}{r^2t^2} \tag{23}$$

Откуда получим формулу для расчета момента инерции:

$$J = mr^2(\frac{gt^2}{2h} - 1) \tag{24}$$

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Установка, общий вид которой представлен на рис.3, состоит из маховика 1 с валом 2, укрепленных на горизонтальной оси вращения. На вал наматывается шнур 3 с грузом 4. Установка оснащена автоматическим устройством измерения времени движения груза. Устройство состоит из блока синхронизации с электрическим секундомером, тормоза, фотоэлектрического створного датчика.

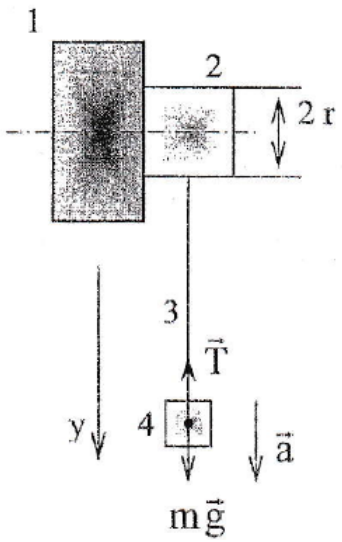

Рис. 3

Нажатие кнопки «пуск» на синхронизирующем устройстве одновременно включает освещение фотоэлемента и электромагнит тормоза.

Колодка тормоза отходит от маховика, и груз с маховиком начинает движение. В этот момент времени возникший при освещении ток фотоэлемента через электромагнитное поле включает электрический секундомер. Выключение секундомера происходит в момент перекрытия грузом луча, освещающего фотоэлемент. Одновременно тормоз останавливает маховик.

ПРОИЗВОДСТВО ИЗМЕРЕНИЙ

1. Шнур с грузом равномерно намотать на шкиф маховика таким образом, чтобы нижний край 1 груза совпадал с указанной преподавателем отметкой на стойке.
2. Тумблер блока синхронизации установить в положение «Включено».
3. Нажать кнопку «Пуск».
4. После остановки маховика произвести отсчет времени движения груза по шкале секундомера. Измерение времени движения груза с одинаковой высоты произвести не менее пяти раз.
5. С помощью штангенциркуля измерить диаметр шкива.
6. Массу груза определить по маркировке на нем.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Вычислить среднее арифметическое значение времени движения груза по формуле: $t_{\text{ср}} = (t_1 + t_2 + t_3/3)$.
2. По измеренному диаметру определить радиус шкива r.
3. Выразив t, m, h, r в системе СИ и подставив их значения в рабочую формулу (10), подсчитать значение момента инерции маховика.
4. Экспериментальные и расчетные данные занести в таблицу.

h, м	m, кг	t_1, с	t_2, с	t_3, с	$t_{\text{ср}}$, с	r, м	J,кг · м^2

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. /И.В. Савельев. М.: наука, 1998. Т.1.
2. Яворский Б.М. Курс физики: в 3 т./Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, Л.И. Милковская. М.: Высшая школа, 1999. Т.2.
3. Трофимова Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. М.: Высшая школа, 2002.
4. Статика, кинематика и динамика механических систем: учеб.-метод. пособие/ Сост. Л.Б. Черняховская, Е.К. Козырева. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. –72 с.
5. Савельев И.В. Курс общей физики. М: Наука, 2016 Т.3
6. Физический практикум/ Под ред. В.И. Ивероновой. М.: Физматгиз, 2017
7. Чуриловский В.Н. Теория оптических приборов. М: Магиностроение, 2015
8. Учебные анимированные клипаты по физики ЭТИ СГТУ [Электронный ресурс] http://tfi.sstu.ru/
9. http://www.sstu.ru/studentu/
10. http://techn.sstu.ru/Biblioteka/
11. http://techn.sstu.ru/new/SubjectFGOS/SpisokPredmetow.aspx